STUDENTEXAMEN.
Skriftligt prov i matematik.
Den 17 mars 1958.

SOCIAL GREN.

Obs. Införda beteckningar bör förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Resonemang, lösning av ekvationer och genomförande av uträkningar får icke vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Geometriska uppgifter skall åtföljas av figurer, ritade med blyerts med hjälp av passare och linjal.

1. En punkt B på ena vinkelbenet av en 30^o vinkel BAC tages till medelpunkt för en cirkel med 10 cm radie. Cirkeln skär det andra vinkelbenet i punkterna C och D. Ytorna av trianglarna ABC och ABD förhåller sig som 1:2. Beräkna längden av sträckan AB.

2. En triangels hörn är belägna i punkterna (0; 0), (3; 6) och (9; 0) i ett rätvinkligt koordinatsystem. Beräkna förhållandet mellan de delar, i vilka triangelns yta delas av kurvan $y = x^2 - 4x + 5$.

3. Den räta linjen $y = 4x + 7$ är tangent till kurvan $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ i den punkt, vars x-koordinat är -2. Den räta linjen $y = x + 1$ är normal till kurvan i den punkt, där denna skär y-axeln. Bestäm konstanterna a, b, c och d. Undersök därefter kurvan med avseende på maximi- och minimipunkter, samt konstruera den i dess huvuddrag.

4. Funktionerna "sinus hyperbolicus för x" (sinh x) och "cosinus hyperbolicus för x" (cosh x) definieras på följande sätt:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Bevisa, att $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2$ har ett av x oberoende värde, och bestäm detta.

5. En person, som hade sina pengar placerade mot 5 % ränta, frigjorde i början av år 1948 120 000 kr och köpte för denna summa en egendom. Under åren 1948 t.o.m. 1957 gav egendomen ingen nettoavkastning utan erfordrade i stället en årlig nettoutgift av 4 000 kr för underhåll och förbättringar. Denna utgift tänkes utgå vid slutet av vart och ett av dessa år. Vid början av år 1958 sålde personen egendomen för 160 000 kr. Hur stor vinst eller förlust kan han därvid sägas ha gjort vid tidpunkten för försäljningen? Ingen hänsyn tages till penningvärdets försämring.

6. Hörnen i två parallella begränsningsytor ABCD och A′B′C′D′ i en kub är så betecknade, att AA′, BB′, CC′ och DD′ är kanter i kuben. Bestäm förhållandet mellan volymerna av tetraedrarna AB′CB och AB′CD′.

7. Basradien i en rät cirkulär cylinder är 1 längdenhet, medan cylinderns höjd varierar. En sfär tangerar cylinderns båda plana ytor i dessas mittpunkter och skjuter icke utanför cylindern. Undersök och åskådliggör grafiskt, hur volymen av den del av cylindern, som ligger utanför sfären, varierar, då sfärens radie ändras. Ange särskilt det största värde, som den nämnda volymen kan anta.

8. I en oändlig geometrisk serie är termerna funktioner av en variabel x. Summan av första och tredje termen är 7, och summan av andra och fjärde termen är $2x^2 - 20x + 25$. Undersök, för vilka värden på x serien är konvergent.